28/03/16.

<u>Ορισμός</u>: Αν $B\neq\emptyset$ φραγμένο, $B\subset\mathbb{R}^n$. Η $f:B\to\mathbb{R}$ (φραγμένη) είναι <u>ολ/μη</u> αν $f_B(x):=\begin{cases} f(x), & x\in B\\ 0, & x\notin B=\mathbb{R}^n\setminus B\end{cases}$ είναι ολ/μη πάνω σε ένα $A\subset\mathbb{R}^n$ κλ. ορθ. με $B\subset A$.

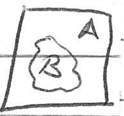
Και $\int_A f_B = \left(\int_A f_B|_A\right)$. Εξετάζουμε μόνο $B\subset\mathbb{R}^n$ ($\neq\emptyset$, φραγμ.) για τα οποία μπορούμε να υπολ. το ολ/μα της $f:B\to\mathbb{R}$ με $f(x)=1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

<u>Ορισμός</u>: Ένα τέτοιο $B\subset\mathbb{R}^n$ λέγεται Jordan-μετρήσιμο.

<u>Ισοδύναμα</u>: ($B\neq\emptyset$, φραγμ., $\subset\mathbb{R}^n$) λέγεται J-μετρ. αν-ν $\exists$ (στο $\mathbb{R}$) το ολ/μα $\int_B 1=\int_A \chi_B$, όπου $A\subset\mathbb{R}^n$ κλ. ορθ. με $B\subset A$ και

$\chi_B(x)=\begin{cases}1, & x\in B\\ 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus B\end{cases}$ (χαρακτηριστική συνάρτηση του B).

και το ολ/μα $\int_B 1 =: v(B)$ είναι το περιεχόμενο του B.



<u>κριτήριο</u> Lebesgue: Ένα φραγμ. μη κενό $B\subset\mathbb{R}^n$ είναι J-μετρ. αν-ν το σύνορο ∂B έχει μηδενικό μέτρο ($\Leftrightarrow$ ∂B: συμπαγές $\Leftrightarrow$ ∂B: μηδ. περιεχόμενο).

<u>Θεώρημα</u> (Κριτήριο Lebesgue): Έστω $B\neq\emptyset$, φραγμένο, J-μετρ. και $f:B\to\mathbb{R}$ φραγμένη. f ολ/μη $\Leftrightarrow$ f συνεχής σχεδόν παντού.

Έστω $B\neq\emptyset$, $B\subset\mathbb{R}^n$, φραγμ., J-μετρ. και συμπαγές και $f:B\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε $\exists\int_B f\in\mathbb{R}$

<u>Ιδιότητες</u> (ίδιες με αυτές για ολ/τα πάνω από κλ. ορθ.)

Έστω $B\subset\mathbb{R}^n$, $\neq\emptyset$, φραγμ., J-μετρ. και $f,g:B\to\mathbb{R}$ ολ/μες. Τότε:

(α) $f+g$ ολ/μη και $\int_B(f+g)=\int_B f+\int_B g$

(β) $c\in\mathbb{R}$, cf ολ/μη $\Rightarrow$ $\int_B (cf)=c\int f$

(γ) $f\le g\Rightarrow \int_B f\le\int_B g$

(δ) $|f|$ ολ/μη με $\left|\int_B f\right| \le \int_B |f|$

(ε) fg ολ/μη.

<u>Πόρισμα</u> (ΘΜΤ για ολ/τα) : $\inf f \cdot v(B) \le \int_B f \le \sup f \, v(B)$

Ιδιότητες (ως προς το πεδίο ολ/σης B (του $\int_B f$))

1) $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-μετρ. $\Rightarrow A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B$ J-μετρ.
(σύμβαση: άρα και φραγμ.)

2) f ολ/μη πάνω στα $A,B\subset\mathbb{R}^n$ (J-μετρ) $\Rightarrow \int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f$

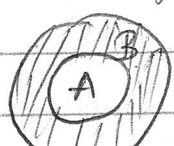
3) Ειδικότερα του ②: $A,B\subset\mathbb{R}^n$ J-μετρ.
$$v(A\cup B) = v(A)+v(B)-v(A\cap B).$$

4) Αν $v(B)=\int_B 1 = 0$, λέμε ότι το B έχει μηδ. περιεχόμενο.
[Δηλ. το $B\subset\mathbb{R}^n$ έχει μηδ. περιεχόμενο σημαίνει ισοδύναμα ότι (1) $(\forall \varepsilon>0)$ (∃ κλ. ορθ. U_i, $i=1,\dots,k$: $\bigcup_{i=1}^{k} U_i \supset B$ και $\sum_{i=1}^{k} v(U_i) < \varepsilon$

(2) $\int_B 1 = 0$ ($= \int_A \chi_B$, όπου $A\supset B$, A κλ. ορθ.)]

5) Ειδικότερα για το ②: $A,B\subset\mathbb{R}^n$ J-μετρ., $\mathring{A}\cap\mathring{B}=\emptyset$ και $f: A\cup B\to\mathbb{R}$ φραγμ. $\overset{ολ/μη}{\Rightarrow} \int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$

π.χ. για δύο κλ. δίσκους ομόκεντρους, ο ένας μέσα στον άλλον έχουμε από το ① ότι η "διαφορά" τους ως σύνολο είναι Jordan-μετρ. αφού όπως θα δούμε κάθε ένας είναι J-μετρ.



6) Ειδικότερα για το ⑤, $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ J-μετρ. και $\mathring{A}\cap\mathring{B}=\emptyset$
(Βλ. ένωση A και $\overline{B\setminus A}$ για τους 2 κυκλ. δίσκους)
$\Rightarrow v(A\cup B)=v(A)+v(B)$.

SOS 1: <u>Θεώρημα</u>: (4.1.16) Έστω $B\subset\mathbb{R}^n$, $B\neq\emptyset$, φραγμ., J-μετρ. και $f: B\to\mathbb{R}$ ολ/μη (σύμβαση: και άρα και φραγμένη). Τότε το $\Gamma_f = \{(\bar{x}, f(\bar{x})) : \bar{x}\in B\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ έχει $(n+1)$-διάστατο μηδενικό περιεχόμενο.

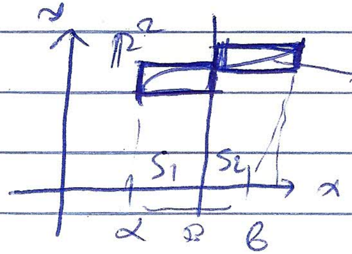
Απόδειξη: (για την πιο απλή περίπτωση: $\boxed{n=1}$ $B=[\alpha,b]\subset\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$

$f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Θ.δ.ο: $\Gamma_f=\{(x,f(x)):x\in[\alpha,b]\}\subset\mathbb{R}^2$

έχει 2-διάστατο περιεχόμενο (=εμβαδόν) μηδέν.

Πράγματι: f ολ/μη $\underset{\text{κριτ. Riemann}}{\Rightarrow}$ $(\forall\varepsilon>0)(\exists P\in\mathcal{P}([\alpha,b]))$: $U(f,P)-L(f,P)=$

$$=\sum_{S\in S_P}\underbrace{(\sup f|_S-\inf f|_S)v(S)}_{V(A_S)}<\varepsilon$$



Όμως $\Gamma_f\subset\bigcup_{S\in S_P} S\times\underbrace{[\inf f|_S,\sup f|_S]}_{=:A_S}$

SOS 2 Θεώρημα (4.1.12): Έστω $B\subset\mathbb{R}^n\neq\emptyset$, J-μετρ., φραγμ. και $f_1,f_2:B\to\mathbb{R}$ ολ/μες και $f_1\le f_2$. Τότε: το σύνολο

$$M=\{(\bar{x},\bar{y}): x\in B \text{ και } \underbrace{\bar{y}\in[f_1(x),f_2(\bar{x})]}_{f_1(\bar{x})\le\bar{y}\le f_2(\bar{x})}\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$$ είναι

J-μετρήσιμο με περιεχόμενο $v(M)=\int_B(f_2-f_1)$

Άσκηση: (Υπολογίστε το περιεχόμενο $v(M)$ του κυκλικού δίσκου $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 1\}$.